



GRUPPO NAZIONALE DI GEOFISICA DELLA TERRA SOLIDA
33° Convegno Nazionale Bologna



**CALCOLO DELL'H/V CON UN MODELLO
DEL CAMPO COMPLETO DELLE
VIBRAZIONI AMBIENTALI BASATO SU
UNA DISTRIBUZIONE DI SORGENTI
SUPERFICIALI SPAZIALMENTE
CORRELATE**

Enrico Lunedei & Dario Albarello

*Dipartimento di Scienze Fisiche, della Terra e dell'Ambiente
Università degli Studi di Siena*

lunedei@unisi.it

dario.albarello@unisi.it

Il **rapporto spettrale H/V del campo delle vibrazioni ambientali** è uno strumento importante per la determinazione speditiva delle **proprietà meccaniche del sottosuolo** e trova ampio utilizzo negli studi di microzonazione sismica

L'uso della **curva $HV(\omega)$** per inferire le **proprietà meccaniche** del sottosuolo **dipende** dalla **disponibilità di modelli teorici** che la leghino a queste ultime.

Nel modello di **Distribuzione Superficiale di Sorgenti (DSS)** (da Field & Jacob, 1993, a Lunedei & Albarello, 2010) le vibrazioni ambientali sono l'effetto di una **distribuzione uniforme di forze aleatorie puntiformi non correlate** che si trovano **sulla superficie terrestre**.

Il calcolo delle **potenze spettrali**, da cui si ottiene la **curva $HV(\omega)$** , col modello DSS per il **campo d'onda completo** è **lento**, perché richiede una **doppia integrazione** (rispetto al numero d'onda ed al raggio orizzontali).

Inoltre, due fondamentali aspetti teorici sono critici nel modello DSS: la **non convergenza dei suddetti integrali** e l'irrealistico presupposto che le **sorgenti** siano mutuamente **non correlate**, indipendentemente alla relativa distanza.

► **Tutti questi problemi possono essere risolti con un cambio di punto di vista!**

Ipotesi fondamentale:

il **campo di spostamento** delle vibrazioni ambientali

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \begin{pmatrix} U_x(x, y, t) \\ U_y(x, y, t) \\ U_z(x, y, t) \end{pmatrix}$$

ed il **campo di forza** che lo genera

$$\mathbf{F}(x, y, t) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, t) \\ F_y(x, y, t) \\ F_z(x, y, t) \end{pmatrix}$$

sono **campi stocastici** definiti **nel piano orizzontale** (x, y) e nel **tempo** t , entrambi **stazionari** (nel tempo) ed **omogenei** (nel piano) almeno al 2° ordine, con media nulla e varianza finita

Ipotesi 2: i due campi stocastici hanno **densità spettrali di potenza**

Conseguenza: esistono le **matrici spettrali** (3x3):

$$\mathbf{h}_U(k_x, k_y, \omega)$$

$$\mathbf{h}_F(k_x, k_y, \omega)$$



Essendo nel **dominio delle piccole oscillazioni**, U ed F sono legati da una **relazione lineare**, che si riflette in una relazione fra le matrici spettrali:

$$\mathbf{h}_U(k_x, k_y, \omega) = \hat{\mathbf{G}}(k_x, k_y, \omega) \cdot \mathbf{h}_F(k_x, k_y, \omega) \cdot \hat{\mathbf{G}}^*(k_x, k_y, \omega)$$

dove $\hat{\mathbf{G}}(k_x, k_y, \omega)$ è la **matrice di Green** nel dominio numero d'onda (orizzontale) e frequenza (pulsazione)

Ipotesi 3: $F_x(x,y,t)$, $F_y(x,y,t)$ e $F_z(x,y,t)$ **non sono correlate** fra loro

Conseguenza: h_F è diagonale e la relazione precedente dà

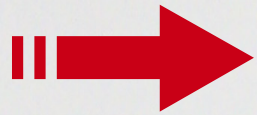
$$h_{U,ii}(k_x, k_y, \omega) = \sum_{j=x,y,z} |\hat{G}_{ij}(k_x, k_y, \omega)|^2 \cdot h_{F,jj}(k_x, k_y, \omega),$$

per $i=x,y,z$



La **potenza spettrale totale rispetto alla pulsazione** (lo spettro marginale) è

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{U,i}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} h_{U,ii}(k_x, k_y, \omega) dk_x dk_y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=x,y,z} |\hat{G}_{ij}(k_x, k_y, \omega)|^2 \cdot h_{F,jj}(k_x, k_y, \omega) dk_x dk_y \end{aligned}$$



$U(x,y,t)$ ha potenza spettrale finita
solo se le **integrande** sono sommabili in $\mathbb{R}^2$

Ma $|\hat{G}_{ij}(k_x, k_y, \omega)|^2$ non lo sono!

➡ $h_{F,jj}(k_x, k_y, \omega)$ non può essere costante rispetto a (k_x, k_y)

➡ $F(x,y,t)$ non può essere un processo puramente aleatorio (cioè, un *rumor bianco*) rispetto allo spazio : deve avere un “colore” relativamente allo spazio

La **densità di potenza spettrale** è la **trasformata di Fourier** della **funzione di covarianza** ————— ➡ deve esistere una **correlazione spaziale** del campo di forza!

Questa si può interpretare come **correlazione fra sorgenti puntuali e/o** come effetto dell'**estensione spaziale delle sorgenti** stesse.

È anche una necessità nella descrizione di sorgenti fisicamente realistiche, che entra in modo naturale in questo quadro

Ipotesi 3: $h_F(k_x, k_y, \omega)$ è **isotropa** nel piano (k_x, k_y)

Conseguenza: la potenza spettrale totale rispetto alla pulsazione (lo spettro marginale) è

$$\tilde{h}_{U,i}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{j=x,y,z} |\hat{G}_{ij}(k, \omega)|^2 \cdot h_{F,jj}(k, \omega) k dk$$

➡ singola integrazione nel modulo $k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$



Il rapporto spettrale H/V

$$HV(\omega) \equiv \sqrt{\frac{P_H(\omega)}{P_V(\omega)}} \begin{array}{l} \longrightarrow P_H(\omega) \equiv \tilde{h}_{U,x}(\omega) + \tilde{h}_{U,y}(\omega) \\ \longrightarrow P_V(\omega) \equiv \tilde{h}_{U,z}(\omega) \end{array}$$

Due esempi di covarianza

$$(r \equiv \sqrt{x^2 + y^2})$$



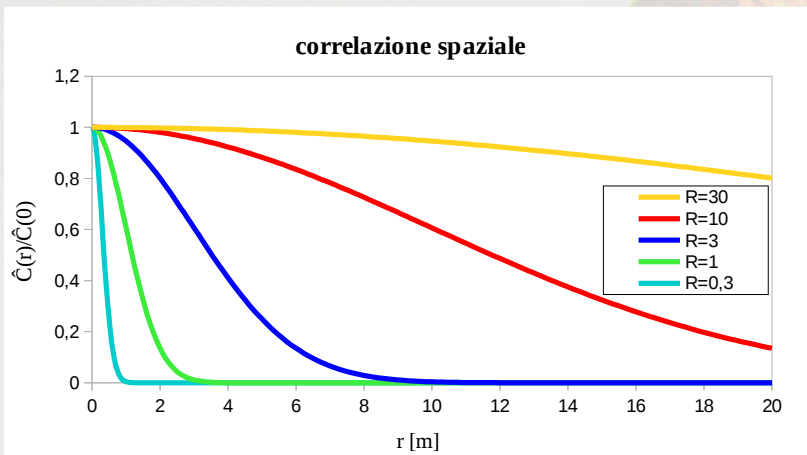
UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Separabile e spazialmente gaussiana

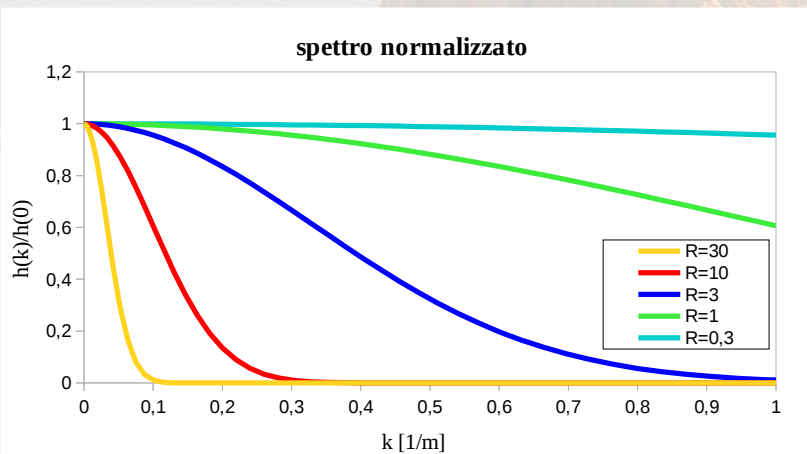
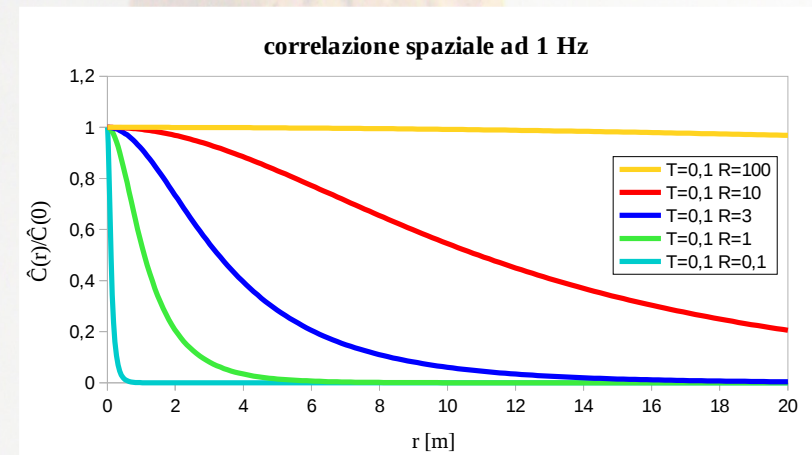
$$C_{F,j}(x, y, t) \equiv \frac{1}{2\pi R_j^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2R_j^2}} \cdot \theta_{F,j}(t)$$

Non separabile a legge di potenza

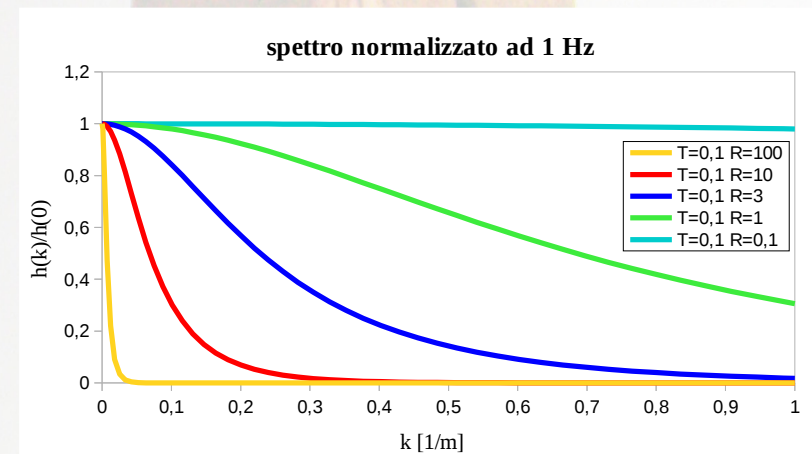
$$C_{F,j}(x, y, t) \equiv \frac{1}{\left(\frac{t}{T_j}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_j}\right)^2 + 1}$$



$$\hat{C}_{F,j}(r; \omega)$$



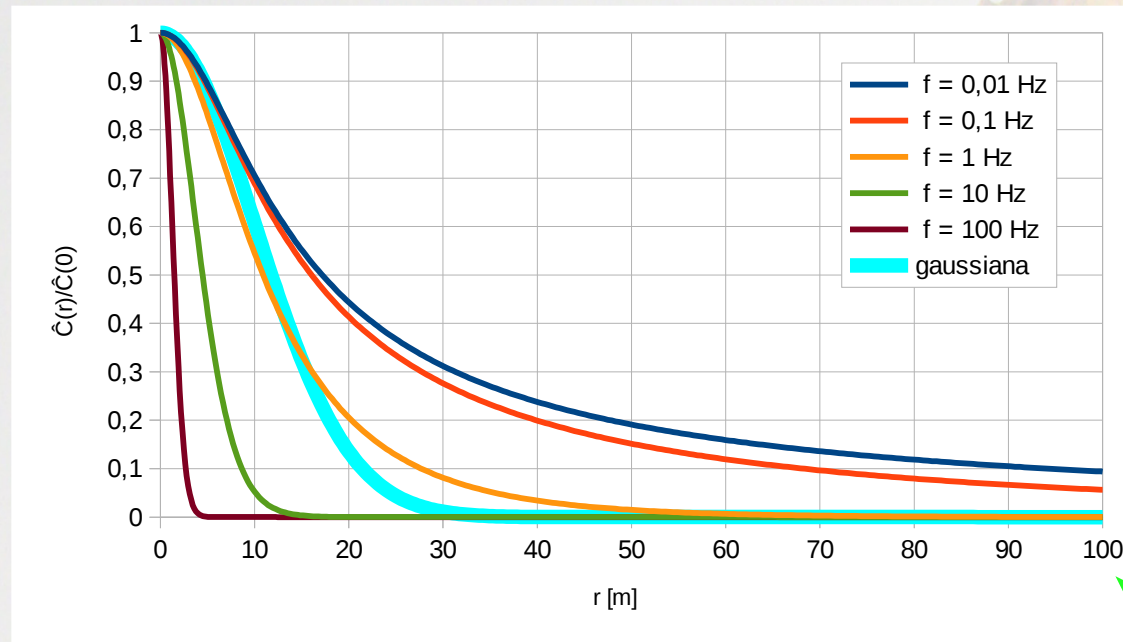
$$h_{F,jj}(k, \omega)$$



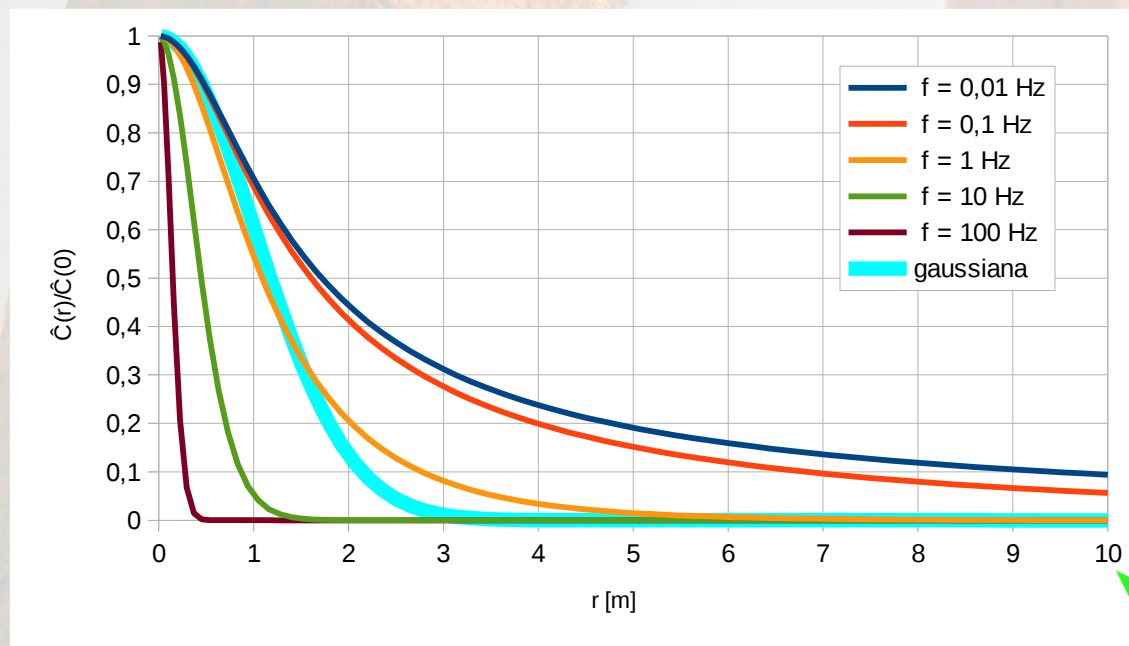
Nel caso non separabile, l'estensione della correlazione dipende dalla frequenza



UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

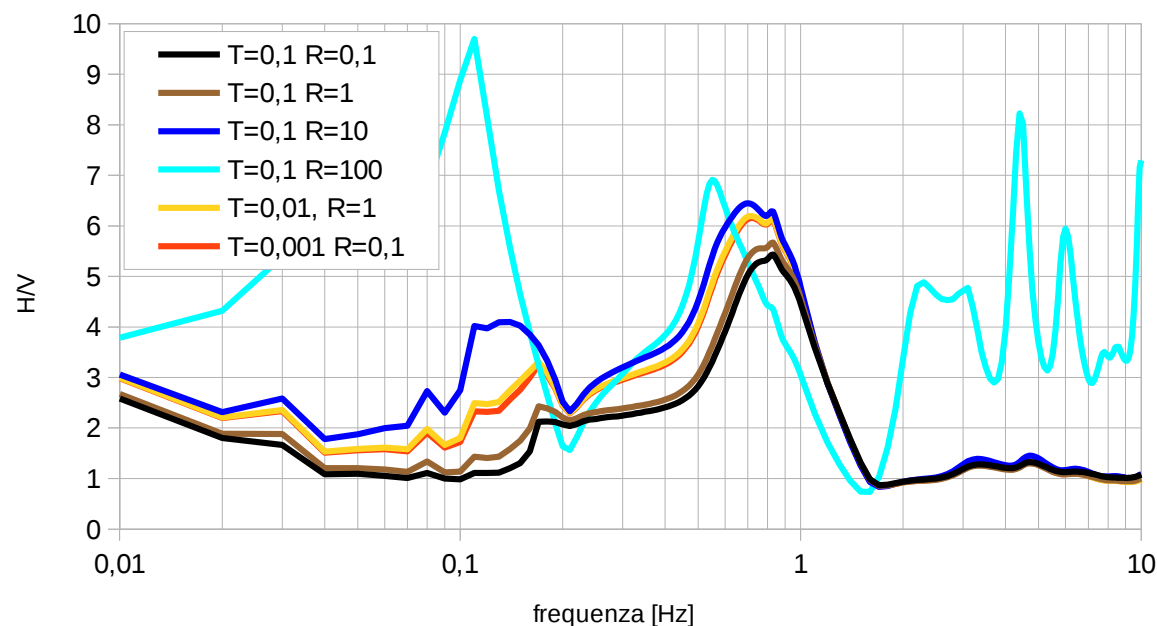
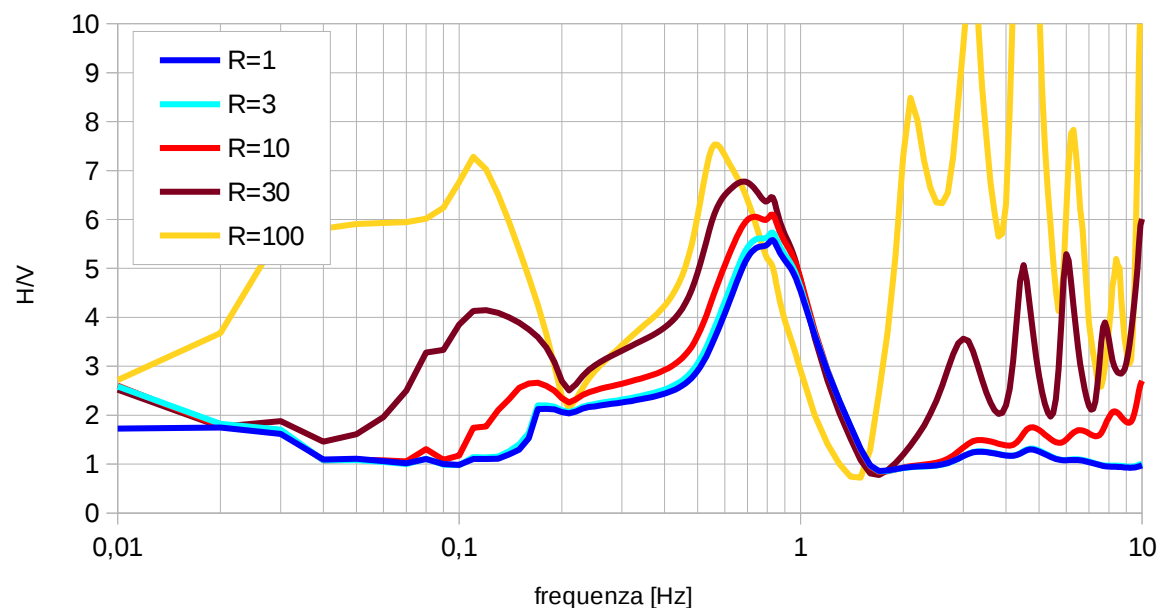


($T=0.1$; $R=10$)

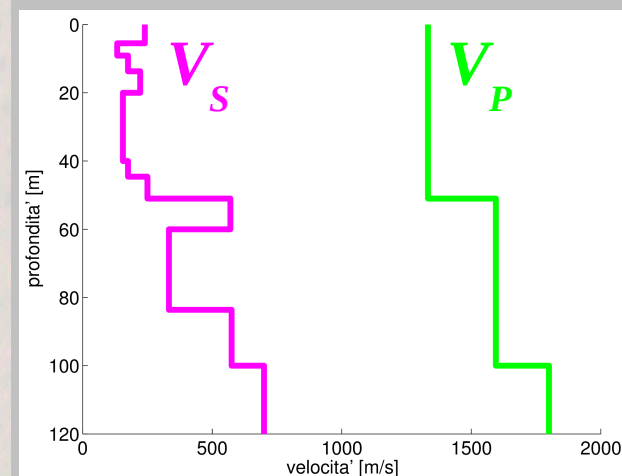


($T=0.1$; $R=1$)

Esempio di applicazione



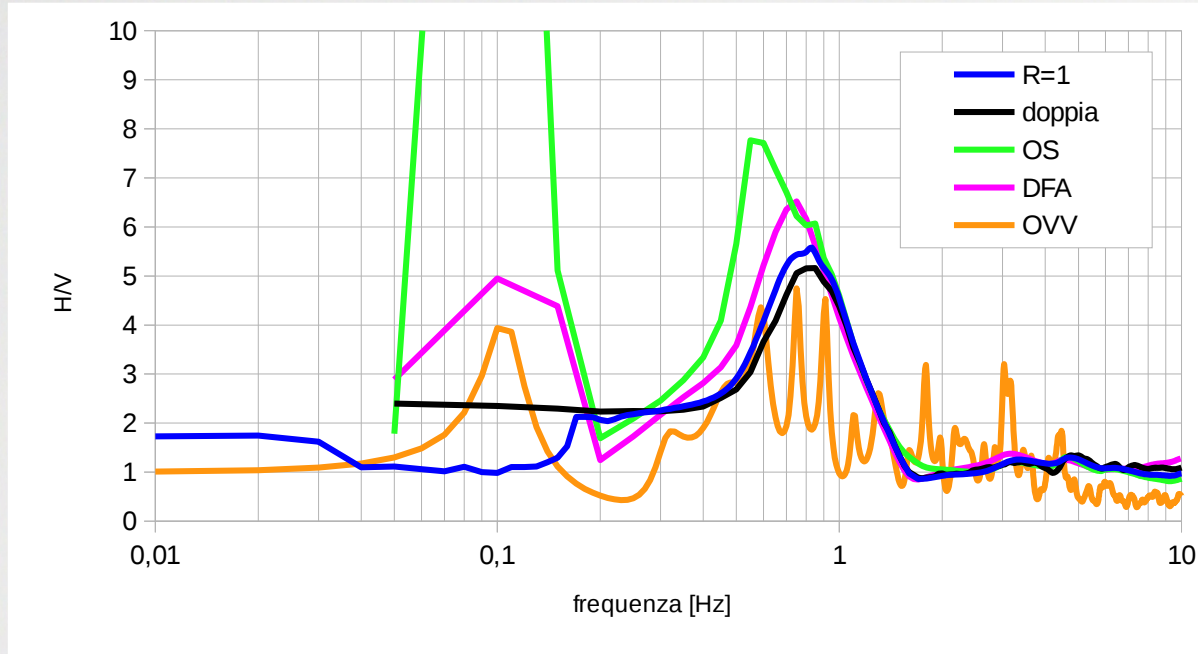
Dodici strati
sovrastanti un
semispazio
(modificata dal
sito A di Arai &
Tokimatsu, 2004)



Separabile e
spazialmente gaussiana

Non separabile a
legge di potenza

Separabile e
spazialmente gaussiana



Tempi d'esecuzione
indicativi per 100
valori di frequenza:

DSS-CC
nuovo

6–10 s

DSS-CC
doppia int. 7000 s

DSS-OS 0,3 s

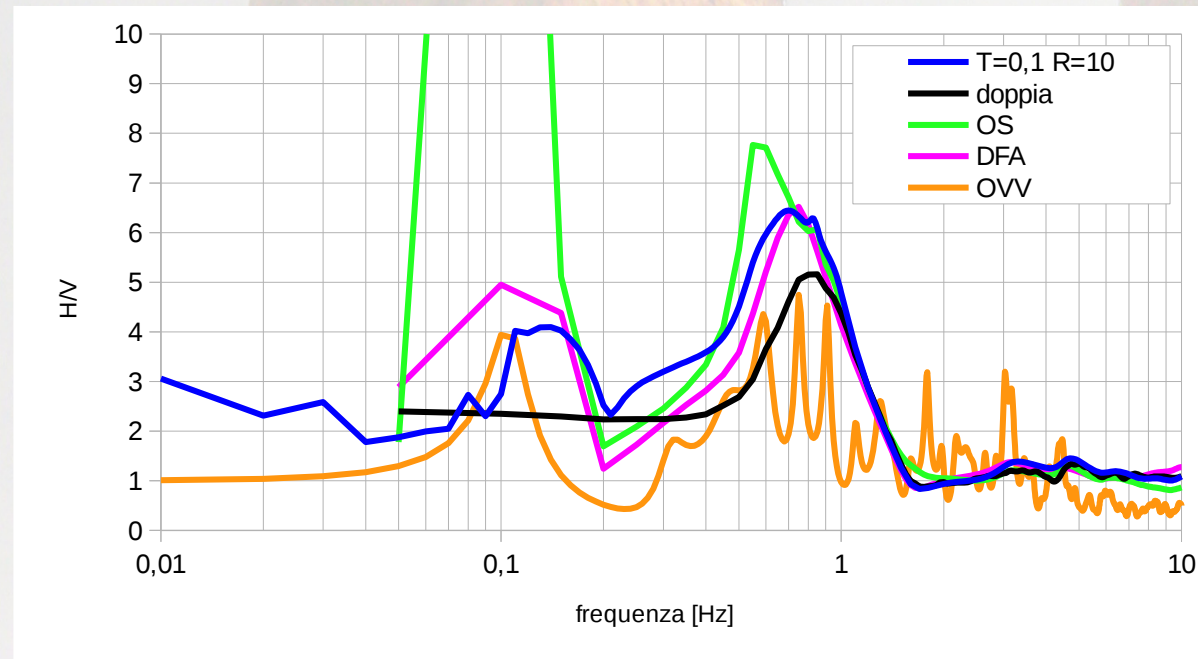
DFA

20 s

OVV

0,007 s

Non separabile a
legge di potenza



Conclusioni

- Questo modello permette di **considerare**, in modo naturale, la **correlazione spaziale fra le sorgenti**
- Le prime simulazioni **suggeriscono che l'estensione** di tale correlazione **sia al più di poche centinaia di metri** per frequenze dell'ordine di 1 Hz
- Il **calcolo** delle curve H/V sintetiche per il campo completo diviene notevolmente **veloce** (dell'**ordine dei 10 s** per 100 frequenze)

Ulteriori studi

- Approfondire la comprensione del **ruolo dei parametri** della correlazione
- Ampliare il **numero di esempi**

Possibili sviluppi

- ▶ Migliorare **qualità e velocità dell'integrazione numerica**
- ▶ Calcolare **altre caratteristiche del campo delle vibrazioni ambientali** con questo modello
- ▶ Considerare la **non stazionarietà spaziale**



GRUPPO NAZIONALE DI GEOFISICA DELLA TERRA SOLIDA
33° Convegno Nazionale Bologna



UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

**Grazie per
l'attenzione**

APPENDICE



UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Formule analitiche dei due esempi di covarianza

Separabile e spazialmente gaussiana

$$C_{F,j}(x, y, t) \equiv \frac{1}{2\pi R_j^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2R_j^2}} \cdot \theta_{F,j}(t)$$

$$\hat{C}_{F,j}(r; \omega) = \hat{\theta}_{F,j}(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi R_j^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2R_j^2}}$$

$$h_{F,jj}(k, \omega) = \hat{\theta}_{F,j}(\omega) \cdot e^{-\frac{R_j^2 \cdot k^2}{2}}$$

Non separabile a legge di potenza

$$C_{F,j}(x, y, t) \equiv \left[\left| \frac{t}{T_j} \right|^2 + \left| \frac{r}{R_j} \right|^2 + 1 \right]^{-1}$$

$$\hat{C}_{F,j}(r; \omega) = \frac{\pi T_j R_j}{\sqrt{r^2 + R_j^2}} \cdot e^{-\frac{T_j \omega}{R_j} \sqrt{r^2 + R_j^2}}$$

$$h_{F,jj}(k, \omega) = \frac{2 T_j (\pi R_j)^2}{\sqrt{(k R_j)^2 + (\omega T_j)^2}} \cdot e^{-\sqrt{(k R_j)^2 + (\omega T_j)^2}}$$

$$(r \equiv \sqrt{x^2 + y^2})$$